**בעיית השוקולד Chocolate bars**

**4**

**3**

**4**

**3**

**2**

**4**

**3**

**2**

**1**

**4**

**3**

**2**

**1**

מתבקשים לשבור פס שוקולט לקוביות/משבצות בודדות בעלות מינימלית,

מחיר השבירה היא i\*(n-i)

כאשר i – מסמל מיקום השבירה, n – אורך הפס (כמות קוביות/משבצות בפס)

שיטה ראשונה – חמדנית (אינדוקטיבית):

1. **n = 4 k = 1 n – k = 3 k \* (n – k) = 1 \* 3 = 3**
2. **n = 3 k = 1 n – k = 2 k \* (n – k) = 1 \* 2 = 2**
3. **n = 2 k = 1 n – k = 1 k \* (n – k) = 1 \* 1 = 1**

**S = 3 + 2 + 1 = 6 = (3\*4)/2 - סכום איברי סדרה חשבונית - סדרת גאוס**

שיטה שניה - רקורסיבית:

**1**

**4**

**3**

**2**

**4**

**3**

**2**

**1**

**4**

**3**

**2**

**1**

1. **n = 4 k = 2 n – k = 2 k \* (n – k) = 2 \* 2 = 4**
2. **n = 2 k = 1 n – k = 1 k \* (n – k) = 1 \* 1 = 1**
3. **n = 2 k = 1 n – k = 1 k \* (n – k) = 1 \* 1 = 1**

**S = 4 + 1 + 1 = 6**

שיטה שלישית – סידרה פיבונצ'י – במידה והפס הוא בגודל של מספר פיבונצ'י אז חלוקה לפי מספרי פיבונצ'י:

**4**

**3**

**4**

**3**

**2**

**4**

**3**

**2**

**1**

**4**

**3**

**2**

**1**

1,1,2,3,5…

1. **n = 4 k = 1 n – k = 3 k \* (n – k) = 1 \* 3 = 3**
2. **n = 3 k = 1 n – k = 2 k \* (n – k) = 1 \* 2 = 2**
3. **n = 2 k = 1 n – k = 1 k \* (n – k) = 1 \* 1 = 1**

**S = 3 + 2 + 1 = 6**

**השערה:** כל שיטה נותנת אותה תוצאה – מחיר של שבירת פס החלוקה לבודדים הוא סכום של הסדרה החשבונית:

**S = n \* (n – 1) / 2**

**Proof by induction on n:**

**Definition:** a price of the cut is equal to **k\*(n-k)**

**Basis:**

1. **n = 1 k = 0 S = 1 \* )1-0)/ 2 = 0**
2. **n = 2 k = 1 S = 2 \* (2-1) / 2 = 1**

**2**

**1**

**2**

**1**

**Induction hypothesis:** Assume that this formula is correct for all intervals of lengths 1,2,…,n-1,n.

**Induction move:**

Let prove that this formula is correct for n+1.

Suppose that first cut point is **k**. Hence, according to the induction hypothesis the value of this function for the sub-interval [1,k] is

**k\*(k-1)/2.**

For the sub-interval [k+1,N] the value of this function is

**(n-k)\*(n-k-1)/2** because a length of this sub-interval is n-(k+1)+1=n-k.

**Since,** k\*(n-k) + k\*(k-1)/2 +(n-k)\*(n-k-1)/2 =

=2\* k\*(n-k)/2 + k\*(k-1)/2 +(n-k)\*(n-k-1)/2 =

=(~~2kn~~ - 2k^2 + k^2 - ~~k~~ + n^2 – ~~nk~~ – n – ~~kn~~ + k^2 + ~~k~~)/2 =

= (n^2 – n)/2 = n \* (n – 1) / 2.

This proof is a complete.

**n**

**n-1**

**2**

**1**

**r s**

**r + s = n**

**S = r \* s + r \* (r – 1) /2 + s \* (s – 1)/2 =**

**( 2 \* r \* s + r^2 + s^2 – r – s ) /2 =**

**( r\*s + r^2 + r\*s + s^2 – (r + s))/2 =**

**(r\*(r + s) + s\*(r + s) – (r + s))/2 =**

**(r + s)\*(r + s – 1)/2 = n\*(n – 1)/2**